Proof of perturbative renormalizability of the ϕ^4 theory following C. G. Callan

Yuji Tachikawa*

2001 年 6 月 19 日

概要

i) くりこみ点の定義, ii) スケルトン展開, iii)Callan–Symanzik 方程式の 3 つから、λ の次数に関して帰納的にくりこまれた頂点関数を計算できる。

1　対象

実スカラー場 (4 次元空間から実数への写像)ϕ に対して作用を

$$S[\phi] = \int d^4x \frac{Z}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{Z\mu_0}{2}\phi^2 + \frac{Z^2\lambda_0}{4!}\phi^4 \tag{1}$$

$$= \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\delta(p_1+p_2)\frac{Z(p_1^2+\mu_0)}{2}\phi(p_1)\phi(p_2) \tag{2}$$

$$+ \int \left(\prod_{i=1}^{4}\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}\right)\delta(p_1+p_2+p_3+p_4)\frac{Z^2\lambda_0}{4!}\phi(p_1)\phi(p_2)\phi(p_3)\phi(p_4) \tag{3}$$

と定め、頂点関数 $\Gamma p_1,\ldots,p_n;q_1,\ldots,q_m$ を

$$\exp(-\Gamma[\phi_{cl},\psi_{cl}]) = \int [d\phi]_\Lambda \exp\left(-S[\phi] + \int d^4xJ(x)(\phi(x)-\phi_{cl}(x)) + \int d^4xK(x)Z_\psi(\phi(x)^2-\psi_{cl}(x))\right) \tag{4}$$

ただし右辺を J,K,ϕ,ψ の関数とみたとき J,K での微係数が消えるよう J,K を調整するものとし、

$$\Gamma[\phi_{cl},\psi_{cl}] = \sum_{n,m}\int\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{d^4q_j}{(2\pi)^4}\right)\prod\phi(-p_i)\prod\psi(-q_j)$$
$$\times\,\delta\Big(\sum p_i + \sum q_j\Big)\frac{\Gamma(p_1,\ldots,p_n;q_1,\ldots,q_m)}{n!m!} \tag{5}$$

と定める。

2　主張

くりこみ条件を $\Gamma(0,0;0)=1$, $p\sim 0$ 周りで $\Gamma(p,-p)\sim p^2+\mu^2$, および $\Gamma(0,0,0,0)=\lambda$ で定め、連結 n-点関数を λ の形式的べき級数として展開することを考える。このとき $\Lambda\to\infty$ の極限で n-点関数の展開係数すべてが有限にとどまるように Z, μ_0, λ_0 を適切に選ぶことができ、そのとき頂点関数は一意に確定する。

* yujitach@big.or.jp

3　証明

■補題 (Callan–Symanzik **方程式**)　ある関数 $\beta, \gamma, \gamma_\psi$ があって頂点関数は

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}+m\gamma_\psi+n\gamma\right)\Gamma(p_1,\ldots,p_n;q_1\ldots,q_m)=2(\gamma+1)\mu^2\Gamma(p_1,\ldots,p_n;0,q_1\ldots,q_m)$$

を満たす。

■補題の導出　Γ の定義 (4) の両辺を μ_0 で微分すると

$$\mu_0\frac{\partial}{\partial\mu_0}\Gamma(p_1,\ldots,p_n;q_1\ldots,q_m)=2Z_\psi\mu^2\Gamma(p_1,\ldots,p_n;0,q_1\ldots,q_m)$$

を得る。μ_0 微分を μ, λ による偏微分で書き直すと

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma+m\gamma_\psi\right)\Gamma(p_1,\ldots,p_n;q_1\ldots,q_m)=\alpha\mu^2\Gamma(p_1,\ldots,p_n;0,q_1\ldots,q_m)$$

と書ける。特に $n=2$、$p=0$ として $\alpha=2\gamma+2$ を得る。

■補題 (Skelton expansion)　$\Gamma(p,-p), \Gamma(p,q;r)$ および $\Gamma(p,q,r,s)$ が $O(\lambda^k)$ まで「$p\to\infty$ のふるまいが適切である」とわかれば、残りの $\Gamma(\cdots;\cdots)$ は $O(\lambda^{k+n-1})$ まで上の 2 点関数、4 点関数を用いてあからさまに有限な式で書ける。

■補題の導出　どなたか Feynman diagram を使わない方法を教えてください。n 点関数に寄与する Feynman diagram は、4 点関数を頂点に、2 点関数を伝播関数に用いた Skelton diagram の和としても書けるが、これは $p\to\infty$ で 4 点関数が $O(p)$、2 点関数が $O(p^{-2})$ ならば次数勘定からあからさまに有限である。$2n$ 点関数には頂点が $n-1$ 個はあるから補題が従う。

■補題　$\beta\sim O(\lambda^2), \gamma\sim O(\lambda), \gamma_\psi\sim O(\lambda)$。

■補題の導出　Feynman diagram の計算をしたことのある人は知っている。

■定理の証明　以下 $\Gamma(,), \Gamma(,;), \Gamma(,,,)/\lambda, \gamma, \beta/\lambda$ が λ の k 乗まで有限であるとわかったとして、帰納的に $\beta, \gamma, \gamma_\psi$ などをあからさまに有限に決定する。

$(d/d(p^2))\Gamma(p,-p)|_{p=0}=1, \Gamma(0,0,0,0)$ および $\Gamma(0,0;0)$ に Callan–Symanzik をつかって

$$2\gamma=2(\gamma+1)\underbrace{\left.\frac{d}{d(p^2)}\Gamma(p,-p;0)\right|_{p=0}}_{\text{leading:}\lambda}\mu^2$$

$$\beta+4\gamma\lambda=2(\gamma+1)\underbrace{\Gamma(0,0,0,0;0)}_{\text{calculable by skelton to}\lambda^{k+2}}\mu^2,$$

$$\gamma_\psi+2\gamma=2(\gamma+1)\Gamma(0,0;0,0)\mu^2-\beta(d/d\lambda)\Gamma(0,0;0)=2(\gamma+1)\underbrace{\Gamma(0,0;0,0)}_{\text{calculable by skelton to}\lambda^{k+1}}\mu^2$$

から $\beta, \gamma, \gamma_\psi$ の知識が一段あがる。

さて Γ(, , , ,) は次元解析から $\Gamma(p_i/\mu)$ と書けるはずなので、Callan–Symanzik から

$$a\frac{d}{da}\Gamma(\frac{ap_i}{\mu}) = -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma(\frac{ap_i}{\mu}) = (\beta\frac{\partial}{\partial\lambda} + 4\gamma)\Gamma(\frac{ap_i}{\mu}) - 2(\gamma+1)\Gamma(\frac{ap_i}{\mu}; 0)\mu^2$$

となり、左辺は一桁よけいに知っているので、あとは積分できることを示せばよい。$a = 0$ のとき (これはそもそも β と γ の決定に使った) はゼロになるので、多分大丈夫だろう。

次に $\Gamma(p, q; r)$ は

$$\begin{aligned} a\frac{d}{da}\Gamma(\frac{ap}{\mu}, \frac{aq}{\mu}; \frac{ar}{\mu}) &= -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma(\frac{ap}{\mu}, \frac{aq}{\mu}; \frac{ar}{\mu}) \\ &= (\beta\frac{\partial}{\partial\lambda} + 2\gamma + \gamma_\psi)\Gamma(\frac{ap}{\mu}, \frac{aq}{\mu}; \frac{ar}{\mu}) - 2(\gamma+1)\Gamma(\frac{ap}{\mu}, \frac{aq}{\mu}; \frac{ar}{\mu}, 0)\mu^2 \end{aligned}$$

上と同様。最後に

$$\begin{aligned} a\frac{d}{da}\Gamma(\frac{ap}{\mu}, \frac{-ap}{\mu}) &= -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma(\frac{ap}{\mu}, \frac{-ap}{\mu}) \\ &= (\beta\frac{\partial}{\partial\lambda} + 2\gamma)\Gamma(\frac{ap}{\mu}, \frac{-ap}{\mu}) - 2(\gamma+1)\Gamma(\frac{ap}{\mu}, \frac{-ap}{\mu}; 0)\mu^2 \end{aligned}$$

は直前に Γ(, ;) を一桁よけいに決定したので、うまくいく。

参考文献

[1] C. G. Callan Jr., pp.43–77 in Les Houches, Session XXVIII (1975) “Méthodes en Théorie des Champs / Methods in Field Theory” (North-Holland, 1976)